Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
(Área de Álgebra)

Diagonalización de matrices simétricas. Descomposición en valores singulares.

Continuando con el tema de diagonalización, estudiamos la diagonalización ortogonal de matrices simétricas y como generalización en cierto sentido del proceso de diagonalización de una matriz cuadrada, la descomposición en valores singulares de una matriz rectangular cualquiera.

1.- DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES SIMÉTRICAS.

En este apartado vamos a realizar un problema de digonalización de una matriz simétrica mediante diagonalización por semejanza ortogonal.

Proposición
Toda matriz simétrica real es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

Proposición
Si λ y μ son valores propios distintos de un endomorfismo simétrico y v y w son vectores propios asociados a λ y μ respectivamente, entonces $v \perp w$.

Corolario
Si A es una matriz simétrica real, entonces existe una matriz P ortogonal y una matriz D diagonal tales que $D = P^tAP$.

La diagonalización de una matriz real simétrica usando como matriz de paso una matriz ortogonal se denomina **diagonalización por semejanza ortogonal** y es al mismo tiempo una diagonalización por semejanza y una diagonalización por congruencia.

Ejemplo 11.1. Diagonalizar por semejanza ortogonal la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

In[1]:= **A={{1,-1,-1},{-1,1,-1},{-1,-1,1}};**
v=Eigensystem[A]

Out[1]:= {{-1, 2, 2}, {{1, 1, 1}, {-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}}

Por tanto, una base del subespacio propio asociado al autovalor t = 1 es el vector {(1,1,1)} y la base del subespacio propio asociado al autovalor t = 2 es la formada por el conjunto de vectores {(-1,0,1), (-1,1,0)}. Ahora tenemos que calcular bases ortonormales para cada uno de los subespacios propios. En el primer caso basta con dividir por la norma:

In[2]:= **u= v[[2]];**
e=Table[0,{i,3}];
e[[1]] = u[[1]] /Sqrt[u[[1]].u[[1]]]

Out[2]:= $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

En el segundo caso tenemos que aplicar Gram-Schmidt a la base considerada:

In[3]:= **e[[2]] = u[[2]] /Sqrt[u[[2]].u[[2]]]**
e[[3]] = u[[3]] -(u[[3]].e[[2]])*e[[2]];
e[[3]] = e[[3]] /Sqrt[e[[3]].e[[3]]]

Out[3]:= $\left\{\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

$\left\{\frac{-1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right\}$

In[4]:= **P = Transpose[e];**
MatrixForm[P]

Out [4]:= $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

Veamos que realmente P es ortogonal:

In[5]:= **P.Transpose[P]==IdentityMatrix[3]**

Out[5]:= True

y que verifica que P^t A P = D como queriamos:

In[6]:= **d=DiagonalMatrix[v[[1]]];**
Transpose[P].A.P==d

Out[6]:= True

■

2.- DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES DE UNA MATRIZ RECTANGULAR.

En este apartado, en cierta forma, generalizamos el concepto de valor propio para matrices rectangulares.

Como ya hemos visto el problema de diagonalización es un problema con muchas aplicaciones. Desgraciadamente, como es bien sabido, no toda matriz puede factorizarse como $A = PDP^{-1}$, con D diagonal. Sin embargo, vamos a ver como cualquier matriz rectangular $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ puede factorizarse mediante la expresión $A = U\sum V^t$ donde $U \in M_m(\mathbb{R})$ con columnas ortogonales y $V \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz ortogonal y $\sum$ una matriz diagonal en cierto sentido de orden igual a A. Este resultado se le conoce como **descomposición en valores singulares** (DVS), la cual es una de las factorizaciones matriciales más útiles en álgebra lineal aplicada.

Para cualquier matriz A de orden $m \times n$, la matriz cuadrada A^tA es simétrica y por tanto puede diagonalizarse por semejanza ortogonal. Además sus autovalores son reales y no negativos. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, los **valores singulares** de A son las raíces cuadradas de los autovalores de A^tA, los denotamos por $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ y por convenio se suponen en orden decreciente, es decir, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$.

Nótese que los valores singulares de A son las longitudes de los vectores Av_i donde v_i son los autovectores ortonormales de la matriz A^tA.

Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, queremos probar que $A = U \sum V^t$ (o lo que es igual $AV = U\sum$) donde $\sum$ es una matriz triangular superior cuyos elementos diagonales son los distintos valores singulares ordenados de mayor a menor (así aseguramos que si algunos de ellos son cero, aparecerán en las últimas filas de $\sum$) y los elementos no diagonales nulos. Veamos como obtener U y V:

Para hallar V, primero calculamos la base ortonormal $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ formada por los autovectores. Entonces V será la matriz ortogonal cuyas columnas son las coordenadas de dichos vectores. Por otra parte, para obtener U, primero consideramos los vectores Av_i (los que sean distintos de cero son ortogonales dos a dos) y para aquellos en los que $\sigma_i = \| Av_i \| \neq 0$ los normalizamos, es decir, calculamos:

$$u_i = Av_i/\sigma_i$$

De esta forma tenemos garantizado que los nuevos $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$, con $r \leq m$, son ortonormales.

Si $r < m$, ampliamos el conjunto anterior hasta tener m vectores ortonormales de $\mathbb{R}^m$: $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_m\}$ y la matriz U será aquella cuyas columnas son las coordenadas de los vectores ortonormales de dicho conjunto. Notese que una forma de ampliar dicho conjunto es obtener una base ortonormal del subespacio ortogonal generado por $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$, es decir, una base ortonormal de $L(\{u_1, u_2, \ldots, u_r\})^{\perp}$.

Ejemplo 11.2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. Calcular su descomposición en valores singulares.

Insertamos A y calculamos A^tA y los valores y vectores propios de dicha matriz simétrica:

In[7]:= **A={{1,1,1}, {1,1,1}, {1,1,1},{1,1,1}};**
vv=Eigensystem[Transpose[A].A]

Out[7]:= {{12, 0, 0}, {{1, 1, 1}, {-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}}

Los valores singulares de A serán las raíces cuadradas de los valores propios de la matriz simétrica A^tA:

In[8]:= **vsing = Sqrt[vv[[1]]]**

Out[8]:= $\{2\sqrt{3}, 0, 0\}$

Por tanto, la matriz Σ vendrá dada por:

In[9]:= **S=Table[0,{i,Dimensions[A][[1]]},{j,Dimensions[A][[2]]}];**
For[i=1,i<=Dimensions[vsing][[1]],i++,S[[i,i]]=vsing[[i]]]
MatrixForm[S]

Out[9]:=

$$\begin{pmatrix}2\sqrt{3}&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Calculemos ahora la matriz ortogonal V, para ellos obtengamos las bases ortonormales de los subespacios propios asociados a los valore propios de A^tA mediante el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt cuando sea necesario:

In[10]:= **ve=vv[[2]]**

f = Table[0,{i,1,3}];
f[[1]]=ve[[1]]
f[[2]]=ve[[2]]
f[[3]]=ve[[3]]-(ve[[3]].f[[2]])/(f[[2]].f[[2]])*f[[2]]

Out[21]:= {1, 1, 1}
{-1, 0, 1}
$\{-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\}$

Por último dividimos por el módulo de cada uno de ellos:

In[11]:= **v=Table[0,{i,3}];**
v[[1]]=f[[1]]/Sqrt[f[[1]].f[[1]]]
v[[2]]=f[[2]]/Sqrt[f[[2]].f[[2]]]
v[[3]]=f[[3]]/Sqrt[f[[3]].f[[3]]]Out[22]:=

Out[11]:= $\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}$
$\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$
$\{-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\}$

Por tanto, la matriz V será aquella cuyas columnas son los anteriores vectores:

In[12]:= **V=Transpose[v];**
MatrixForm[V]

Out[12]:= $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

Comprobamos que V es ortogonal:

In[13]:= **Inverse[V]==Transpose[V]**

Out[13]:= `True`

Calculemos ahora la matriz ortogonal U, para ellos multiplicamos Av_i y para aquellos en los que dicho producto sea distinto del vector cero, los dividimos por su norma, dando lugar a las primeras columnas de U:

In[14]:= **g=Table[A.ve[[i]],{i,3}]**

Out[14]:= `{{3,3,3,3},{0,0,0,0},{0,0,0,0}}`

Como vemos sólo uno de estos productos es no nulo, lo dividimos por su norma, y obtendríamos un vector (primera columna de U):

In[15]:= **u=Table[0,{i,4}]**
u[[1]]=g[[1]]/Sqrt[g[[1]].g[[1]]]

Out[15]:= $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

Ahora tenemos que ampliar la base anterior hasta tener 4 vectores ortonormales de $\mathbb{R}^4$. Para ellos calculamos una base del subespacio ortogonal al generado por los vectores u_i obtenidos antes y posteriormente usando Gram-Schmidt la ortonormalizamos:

In[16]:= **Solve[u[[1]].{x,y,z,t}==0,{x,y,z,t}]**

```
Solve::svars :  Equations may not give solutions  for all "solve" variables. More
```
Out[16]:= {{x→-t-y-z}}

Tomando y = α, z = β y t =γ , el subespacio ortogonal al subespacio generado por u_1=(1/2,1/2,1/2,1/2) está formado por los vectores de la forma ($-\gamma - \alpha - \beta$, α, β, γ) y su base es:

{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)}

Usamos ahora Gram-Schmidt para ortonormalizarla:

In[17]:= **uort={{-1,1,0,0},{-1,0,1,0},{-1,0,0,1}};**

o=Table[0,{i,Length[uort]}];
o[[1]]=uort[[1]]
o[[2]]=uort[[2]]-(uort[[2]].o[[1]])/(o[[1]].o[[1]])*o[[1]]
o[[3]]=uort[[3]]-(uort[[3]].o[[1]])/(o[[1]].o[[1]])*o[[1]]-(uort[[3]].o[[2]])/(o[[2]].o[[2]])*o[[2]]

Out[17]:= {-1, 1, 0, 0}
$\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\}$
$\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\}$

In[18]:= **u[[2]]=o[[1]]/Sqrt[o[[1]].o[[1]]]**
u[[3]]=o[[2]]/Sqrt[o[[2]].o[[2]]]
u[[4]]=o[[3]]/Sqrt[o[[3]].o[[3]]]

Out[18]:= $\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\}$

$$\{-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\}$$
$$\{-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$$

Por tanto, la matriz U será aquella cuyas columnas son los vectores de la lista u:

In[19]:= **U=Transpose[u];**
MatrixForm[V]

Out[19]:= $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

Con lo anterior completamos la descomposición en valores singulares de A, comprobémoslo:

In[20]:= **A==U.S.Transpose[V]**

Out[20]:= `True`

■